Ad §5.6 Transzendente Körpererweiterungen

Lemma 1: Sei $A \subset L$ algebraisch unabhängig über K, und sei $b \in L \setminus A$. Dann gilt

$$A \cup \{b\} \text{ alg. abh. über } K \iff b \text{ algebraisch über } K(A).$$

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei $A \cup \{b\}$ alg. abh. über K. Wähle verschiedene $a_1, \ldots, a_n \in A$ sowie $f \in K[X_1, \ldots, X_n, Y] \setminus \{0\}$ mit $f(a_1, \ldots, a_n, b) = 0$. Schreibe $f = \sum_i' f_i Y^i$ mit $f_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Wegen $f \neq 0$ existiert ein i mit $f_i \neq 0$. Da A algebraisch unabhängig über K ist, gilt für dieses auch $f_i(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Daher ist das Polynom $g(Y) := f(a_1, \ldots, a_n, Y) = \sum_i' f_i(a_1, \ldots, a_n) Y^i \in K(A)[Y] \setminus \{0\}$. Wegen $g(b) = 0$ ist also b algebraisch über $K(A)$.

"$\Leftarrow$" Sei b algebraisch über $K(A)$. Wähle $g \in K(A)[Y] \setminus \{0\}$ mit $g(b) = 0$. Schreibe $g = \sum' g_i Y^i$ mit $g_i \in K(A)$. Schreibe jedes $g_i = \frac{h_i}{k}$ mit $h_i, k \in K[A]$ und $k \neq 0$. Schreibe jedes $h_i = f_i(a_1, \ldots, a_n)$ für geeignete $a_1, \ldots, a_n \in A$ und $f_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Setze $f := \sum_i' f_i Y^i \in K[X_1, \ldots, X_n, Y]$. Dann $\exists i: g_i \neq 0 \Rightarrow h_i \neq 0 \Rightarrow f_i \neq 0$, also $f \neq 0$. Außerdem ist $f(a_1, \ldots, a_n, b) = k \cdot g(b) = 0$. Somit ist $A \cup \{b\}$ algebraisch abhängig. qed.

Lemma 2: Seien $A \subset L \ni b$ so dass b algebraisch über $K(A)$ ist und L algebraisch über $K(A \cup \{b\})$. Dann ist $L/K(A)$ algebraisch.

Beweis:
$$\text{Vor} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} K(A \cup \{b\})/K(A) \text{ algebraisch} \\ L/K(A \cup \{b\}) \text{ algebraisch} \end{array}\right\} \Rightarrow L/K(A) \text{ algebraisch.}$$

qed.

Prop.: Für jedes $A \subset L$ sind äquivalent:

(a) A alg. unabh. über K und $L/K(A)$ algebraisch.

(b) A maximal alg. unabh. über K.

(c) A minimal mit $L/K(A)$ algebraisch.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $A \subsetneq A' \subset L$ und wähle $b \in A' \setminus A$. Dann ist b algebraisch über $K(A)$; nach Lemma 1 ist daher $A \cup \{b\}$ alg. abh. über K; somit auch A' alg. abh. über K.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $b \in L$. Ist $b \in A$, so ist b alg. über $K(A)$. Ist $b \notin A$, so ist $A \cup \{b\}$ alg. abh. über K wegen der Maximalität von A. Nach Lemma 1 ist daher b alg. über $K(A)$.

(a) $\Rightarrow$ (c): Sei $A' \subsetneq A$ und wähle $b \in A \setminus A'$. Dann ist $A' \cup \{b\}$ alg. unabhängig über K, nach Lemma 1 (Kontraposition) also b nicht algebraisch über $K(A')$. Folglich ist $L/K(A')$ nicht algebraisch.

(c) $\Rightarrow$ (a): ~~Ann~~ Annahme: A ~~alg.~~ algebraisch abhängig.

Dann existieren verschiedene $a_1, \ldots, a_n \in A$ und $f \in K[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$ mit $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Wähle solche mit n minimal. Dann ist $n \geq 1$ und $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ alg. unabh. über K. Nach Lemma 1 ist dann a_n alg. über $K(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Also auch über $K(A \setminus \{a_n\})$. Nach Lemma 2 ist dann $L/K(A \setminus \{a_n\})$ algebraisch. Aber dies widerspricht der Minimalität von A.

qed.

<u>Austauschsatz</u>: Für je zwei Transzendenzbasen A und B von L/K und jedes $b \in B \setminus A$ existiert ein $a \in A \setminus B$ sodass $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ eine Transzendenzbasis von L/K ist.

<u>Beweis</u>: Nach Eigenschaft (b) ist $A \cup \{b\}$ alg. abh. über K. Also existieren $n \geq 0$ und verschiedene $a_1, \dots, a_n \in A$ sowie $f \in K[X_1, \dots, X_n, Y] \setminus \{0\}$ mit $f(a_1, \dots, a_n, b) = 0$. Wähle solches mit n minimal. Da B alg. unabh. über K ist, ist dann $\{a_1, \dots, a_n, b\} \not\subset B$. Also ist $n \geq 1$ und $\exists i : a_i \notin B$. Nach Vertauschen sei oBdA $a_n \notin B$.

<u>Beh.</u>: $A' := (A \setminus \{a_n\}) \cup \{b\}$ ist Transzendenzbasis von L/K.

<u>Bew.</u>: Nach Konstruktion ist $\{a_1, \dots, a_n, b\}$ alg. abh. über K. Nach der Minimalität von n ist $\{a_1, \dots, a_{n-1}, b\}$ alg. unabh. über K. Nach Lemma 1 ist daher a_n alg. über $K(a_1, \dots, a_{n-1}, b)$. Also auch über $K(A')$. Wegen $A \subset A' \cup \{a_n\}$ ist auch $L/K(A' \cup \{a_n\})$
(*) algebraisch. Nach Lemma 2 ist folglich $L/K(A')$ algebraisch.

Annahme: A' alg. abh. über K.
Da $A' \setminus \{b\} = A \setminus \{a_n\}$ alg. unabh. über K ist, folgt aus Lemma 1, dass b alg. über $K(A \setminus \{a_n\})$ ist. Daraus und aus (*) folgt mit Lemma 2, dass $L/K(A \setminus \{a_n\})$ algebraisch ist. Dies widerspricht der Minimalität von A in (c). Also ist A' alg. unabh. über K.

qed.

Ad §5.6: Transzendente Körpererweiterungen

Bsp.: Der elliptische Funktionenkörper $\mathbb{C}(x,y)$ für über $\mathbb{C}$ transzendente Elemente x,y mit $y^2 = x^3 - x$ ist nicht rein transzendent über $\mathbb{C}$.

Beweis: Da y algebraisch über $\mathbb{C}(x)$ ist, ist der Transzendenzgrad gleich 1. Wäre der Körper rein transzendent über $\mathbb{C}$, so wäre er daher gleich $\mathbb{C}(t)$ für ein $t \in \mathbb{C}(x,y)$. Dieses ist dann ebenfalls transzendent über $\mathbb{C}$, und wir können mit ihm rechnen wie mit einer Variablen.

Schreibe $x \in \mathbb{C}(t)$ in der Form $x = \frac{f}{g}$ für teilerfremde $f,g \in \mathbb{C}[t] \setminus \{0\}$, und rechne

$$\underbrace{g^4 \cdot (x^3 - x)}_{\overbrace{g^4 y^2 = h^2}^{\shortparallel}} = g^4 \cdot \left(\frac{f^3}{g^3} - \frac{f}{g}\right) = f^3 g - f g^3 = f \cdot g \cdot (f-g) \cdot (f+g)$$

alle paarweise teilerfremd in $\mathbb{C}[t]$

mit $h := g^2 y \in \mathbb{C}(t)$.

Wegen $h^2 \in \mathbb{C}[t]$ ist auch $h \in \mathbb{C}[t]$. Aus der Teilerfremdheit der Faktoren auf der rechten Seite folgt, dass jeder Faktor eine gerade Nullstellenordnung an jeder Nullstelle haben muss. Also ist jeder Faktor ein Quadrat. Insbesondere ist $f = m^2$ und $g = l^2$ für gewisse $l, m \in \mathbb{C}[t] \setminus \{0\}$. Also ist $x = s^2$ für $s := \frac{m}{l} \in \mathbb{C}(t)$.

Da x transzendent ist, ist auch s transzendent, und daher ist $[\mathbb{C}(s)/\mathbb{C}(x)] = [\mathbb{C}(s)/\mathbb{C}(s^2)] = 2$. Andererseits ist $[\mathbb{C}(x,y)/\mathbb{C}(x)] \leq 2$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(t) = \mathbb{C}(x,y) & & \\ | & & \\ \mathbb{C}(s) & & \Big|\ \leq 2 \\ & {}_{2}\diagdown & \\ & & \mathbb{C}(x) \end{array}$$

Daraus folgt $[\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(s)] = 1$, also $\mathbb{C}(t) = \mathbb{C}(s)$.

Nun vergessen wir t und können nun das Element s wie eine ~~und~~ Variable über $\mathbb{C}$ auffassen. Wir rechnen um

$$y^2 = x^3 - x = s^6 - s^2 = s^2 \cdot (s^4 - 1).$$

Wegen $y \in \mathbb{C}(s)$ folgt dann schon $y \in \mathbb{C}[s]$. Dann hat aber y^2 eine ~~dop~~ einfache Nullstelle bei $s = 1$. Widerspruch.

qed